О ЧЕТНЫХ ЧИСЛАХ В УЗЛАХ КВАДРАТНЫХ РЕШЕТОК
ON EVEN NUMBERS AT THE NODES OF SQUARE LATTICES

ALEXANDER G. SHCHERBAKOV*

Аннотация. В работе рассмотрен натуральный ряд чисел в виде приведенной системой вычетов по модулю равному произведению первых простых чисел =modПP. При этом множество вычетов и НЕ вычетов по modПP, представлены наложенными друг на друга безграничными целочисленными квадратными решетками (с векторами простых нечетных чисел каждая), которые рассекаются четными диагоналями этих квадратных решеток.
Выведено выражение для определения количества узлов пересечения пар квадратных решеток со своими диагоналями. То есть определено количество способов представления всякого четного числа в виде суммы и разности пар вычетов по modПP.
Abstract.
In this study the positive integers are analyzed as the normalized system of residues by the module equal to the product of the first prime numbers =modПP. Whereby a multitude of residues and NON-residues modПP, is represented by boundless integral-valued square lattices covered at each other (with vectors of prime odd numbers each), which are divided by even diagonals of these square lattices.
An expression has been defined for evaluation of the node number of meeting pairs of the square lattices with their diagonals. I.e. there has been defined the number of ways representing each even number as a sum and a difference of residue pairs by modПP.

Key words. Interchange, residue pairs, modulus, modПP

AMS subject classifications. 11R04

1. <u>Фрактальный узор ⊞ПP комбинации квадратных решеток $\leq P$</u>. Рассмотрим систему, состоящую из безграничной целочисленной квадратной решетки с единичным вектором, ячейки которой заполняются наложенными друг на друга безграничными целочисленными квадратными решетками (⊞) с векторами простых нечетных чисел каждая, ($⊞3 + ⊞5 + ⊞7 + ⊞11 + ... +$некоторая ⊞P).

<table>
<tr><td>В</td><td>⇔</td><td>В</td><td>⇔</td><td>В</td><td>⇔</td><td>В</td><td>⇔</td><td>Рис.1. вид фрактального узора ⊞ПP</td></tr>
<tr><td>⇕</td><td>И</td><td>⇕</td><td>И</td><td>⇕</td><td>И</td><td>⇕</td><td>И</td><td rowspan="9">При наложении каждой очередной квадратной решетки ⊞P получим сложный периодический фрактальный узор квадратных решеток ≤P обладающий поворотной симметрией четвертого порядка образуемый комбинацией этих решеток$\leq P$ с расположением этой комбинации по четырем направлениям этого фрактального узора ⊞ПP. В виде безгранично повторяемых (с периодом=ПP) элементов рисунков 2. и 3: (И).,(⇔).,(В).,(⇕).</td></tr>
<tr><td>В</td><td>⇔</td><td>В</td><td>⇔</td><td>В</td><td>⇔</td><td>В</td><td>⇔</td></tr>
<tr><td>⇕</td><td>И</td><td>⇕</td><td>И</td><td>⇕</td><td>И</td><td>⇕</td><td>И</td></tr>
<tr><td>В</td><td>⇔</td><td>В</td><td>⇔</td><td>В</td><td>⇔</td><td>В</td><td>⇔</td></tr>
<tr><td>⇕</td><td>И</td><td>⇕</td><td>И</td><td>⇕</td><td>И</td><td>⇕</td><td>И</td></tr>
<tr><td>В</td><td>⇔</td><td>В</td><td>⇔</td><td>В</td><td>⇔</td><td>В</td><td>⇔</td></tr>
<tr><td>⇕</td><td>И</td><td>⇕</td><td>И</td><td>⇕</td><td>И</td><td>⇕</td><td>И</td></tr>
<tr><td>В</td><td>⇔</td><td>В</td><td>⇔</td><td>В</td><td>⇔</td><td>В</td><td>⇔</td></tr>
<tr><td>⇕</td><td>И</td><td>⇕</td><td>И</td><td>⇕</td><td>И</td><td>⇕</td><td>И</td></tr>
<tr><td colspan="9">(В) -вид квадратных решеток ≤P вложенных друг в друга с центром (В)
(смотрите рис.2). где центр (В) = n·ПP., n - целое.).
(И)-вид квадратных решеток≤P исходящих по 4 диагоналям из центра-(И).Рис.3.
(⇕)-сечение комбинации решеток≤P от(В) до(В)
(тождественно И⇔И с поворотом на 90°)
(⇔)-сечение комбинации решеток≤P от(И)до(И). тождественно В⇕В с поворотом на90°</td></tr>
</table>

Элементы периодической комбинации решеток≤P рис.1. (И).,⇕).,(В).,(⇔) (повторяемые с периодом = ПР), выделим по точкам =(В) в виде "левых и правых фрактальных ромбов"со стороной =(ПР/2)- каждый. смотрите рис.4.

---

*Russia,142507, Moscow region, Pavlovsky Posad town.

									Рис.4. Вид фрактальных ромбов $\boxplus$ПP
В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	
$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	Из поворотной симметрии "вложенных"друг
В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	в друга квадратных решеток$\leq P$ по четырем
$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	направлениям "фрактального узора$\boxplus$ПP"
В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	следует, что множество "левых и правых"
$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	фрактальных ромбов (со стороной =ПР/2)
В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	тождественны друг-другу и отсекают в свой
$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	В	$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	состав ровно (П$P/2)^2$ узлов пересечений от
В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	единичной квадратной решетки, из которых
$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	И	$\Updownarrow$	ровно $[\varphi($П$P)]^2$ "единичных узла"свободны
В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	$\Leftrightarrow$	В	от пересечений с квадратными решетками$\leq$Р

2. Ромбы диагоналей $\boxplus$ПP. Восстановим оси координат (Х−У) из произвольного центра (В) и дополним рисунок 4. множеством диагоналей с единичным шагом каждая. Которые расположим параллельно и перпендикулярно "диагонали - В"проходящей через центры "вложенных решеток-В".
Получим тождественные друг-другу "левые"и "правые"фрактальные ромбы диагоналей содержащие по П$P/2$ диагоналей длиной П$P/2$ каждая. В которых тождественно друг-другу (с поворотом на 90°) расположены узлы пересечений квадратных решеток с диагоналями этих "ромбов"(смотрите рис.5.).
Вполне очевидно, что на П$P/2$ диагоналях всякого "левого и правого фрактальных ромбов диагоналей $\boxplus$ПP"расположено ровно $[($П$P/2)]^2$ различных узлов пересечений с единичной квадратной решеткой, из которых ровно $[\varphi($П$P)]^2$ узла (единичной квадратной решетки), свободны от пересечений между собой квадратных решеток $\leq$Р. То есть на П$P/2$ диагоналях всякого "левого и правого"фрактальных ромбов диагоналей расположено ровно $[\varphi($П$P)]^2$ узлов пересечений между собой пар неизвестных нам квадратных решеток >Р. Вида (С$_X - C_Y$)− слева и (С$_X + C_Y$)− справа. где C_X, C_Y >Р.

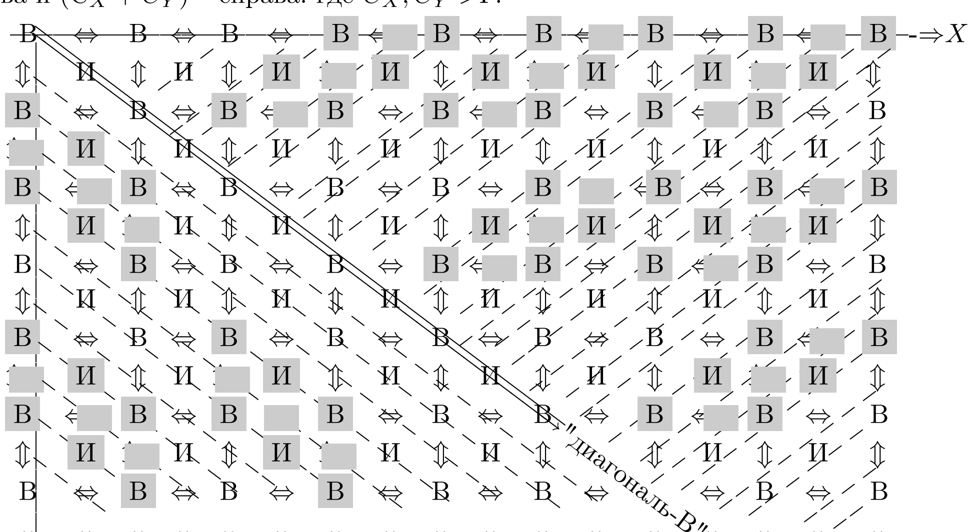


Рисунок 5. Вид фрактальных ромбов диагоналей
где: (− − − −)вид (П$P/2$) диагоналей всякого ромба

3. Счетное множество фрактального узора $\boxplus \Pi P$. Рассмотрим счетное множество которое мы получим в результате восстановления осей координат от выбранного нами центра $-$(В) "вложенных решеток $\boxplus \Pi P$"смотрите рис.6.
Для этого: для каждого фиксированного значения нарастающего периода=ΠP (П5=30., П7=210.,П11=2310.,....ΠP) на "диагонали В"рисунка 5. всегда найдется точка-(В)=nΠP, которая и будет принята за начало координат Х=0.,У=0 (для данного значения периода=ΠP), при этом точка-(В) будет являться центром начала отсчета всего множества всех вложенных друг в друга квадратных решеток =С>Р. То есть, при возрастании ΠP, всякое (дальнейшее) расположение точки-(В) на "диагонали-В"будет зависеть от значения периода=ΠP.
1). На осях Х - У отложим множество всех нечетных чисел. Так как всякое нечетное число - Р отсекается соответствующей квадратной решеткой - $\gtreqless$Р и на оси Х и на оси У рисунка 6.
2). Пронумеруем четными номерами - (четными числами по нарастающей) все множество всех диагоналей, которые расположены на рисунке 6. параллельно и перпендикулярно "диагонали В"с единичным шагом - каждая.
Получим множество всех нечетных чисел (в виде квадратных решеток с векторами простых нечетных чисел расположенных на осях Х-У рисунка 6.), которые перекрывают два множества всех четных чисел (слева и справа от "диагонали В").
Ряд нечетных чисел, расположенный на осях Х - У (рис.6.), рассмотрим как приведенную систему вычетов по модулю равному произведению первых простых чисел =modΠP.
Квадратные решетки >Р назовем решетками-вычетами по modΠP.
Квадратные решетки $\leq$ Р назовем решетками-НЕ вычетами по modΠP.
Тогда слева и справа от "диагонали В"мы получим два множества четных диагоналей (чисел) где:
$-$номер=R всякой четной диагонали (слева от "диагонали В"), будет показывать результат разности двух вычетов по modΠP, (как узлы пересечения пар "решеток-вычетов">Р на этой диагонали, с координатами каждой пары вычетов по modΠP $\boxplus$У$-\boxplus$Х. То есть: [(решетка-вычет-Су) $-$ (решетка-вычет-C_X)]=R.
$-$номер=R всякой четной диагонали (справа от "диагонали В"), будет показывать результат суммы двух вычетов по modΠP, как узлы пересечения пар "решеток-вычетов">Р на этой диагонали, с координатами каждой пары вычетов по modΠP $\boxplus$У+$\boxplus$Х. То есть: [(решетка-вычет-Су) + (решетка-вычет-C_X)]=R.

4. Ромбы диагоналей счетного множества. Рассматривая комбинацию представленную на рисунке 7. в виде множества "левых и правых"диагоналей с единичным шагом каждая и четной нумерацией от центра координат Х-У, восстановленных в некоторой точке (В). Получим, что множество диагоналей рассекают периодический фрактальный узор $\boxplus \Pi P$, на множество периодических тождественных друг-другу "ромбов отрезков диагоналей"со стороной=($\Pi P/2$) (далее "фрактальных ромбов$-\boxplus \Pi P$"), повторяемых с периодом =ΠP.
При этом все множество "фрактальных ромбов$-\boxplus \Pi P$" "слева и справа"от "диагонали В", тождественны одному единственному "первому фрактальному ромбу $-$ $\boxplus \Pi P$" расположенному на оси "У"от 1 до (2$\Pi P\pm$1) рисунка 7.
Так как все множество отрезков диагоналей (длиной =$\Pi P/2$) с четными номерами вида (nΠP+R) рисунка 7., рассекаются одной единственной комбинацией квадратных решеток $\leq$Р, которая расположена на осях Х-У "первого фрактального ромба$-\boxplus \Pi P$" на длине =$\Pi P/2$ отрезка со счетным номером =R, а далее без

изменений повторяется с периодом $=\Pi P$ "слева и справа"от "диагонали В". (при n$\geq$2 "справа". Смотрите рис.7.).
Из тождественности "фрактальных ромбов$-\boxplus\Pi P$" следует, что если некоторое четное число =R можно неизвестными нам -f(R)способами представить в виде разности двух различных вычетов по modΠP, то есть f(R) парами с наименьшим вычетом=C_1 по modΠP вида: (C$-C_1$)=R.
Тогда на диагонали с четным номером =R "первого фрактального ромба$-\boxplus\Pi P$", будет расположено ровно f(R) узлов пересечений пар "решеток-вычетов">P между собой (то есть, f(R) пар с наименьшим вычетом=C_1 по modΠP вида: (C$-C_1$)=R с координатами каждой пары R=($\boxplus$У$-\boxplus$Х). (где C_1- наименьшие вычеты modΠP $1\leq C_1 \leq \Pi P$).
При этом множество всех остальных отрезков диагоналей (длиной $=\Pi P/2$) с четными номерами вида (nΠP+R), расположенные во всех остальных "фрактальных ромбах$-\boxplus\Pi P$", будут содержать ровно по f(R) узлов пересечений пар "решеток-вычетов">P между собой (пар вычетов по modΠP).
При этом, на соответствующей тождественной "правой"диагонали с четным номером вида (2ΠP+R) (длиной $=\Pi P/2$), четное число вида (2ΠP+R) будет представлено f(R) способами, (f(R) узлами пересечений пар "решеток-вычетов">P между собой), то есть f(R) количеством пар вычетов по modΠP.

В виде суммы двух вычетов по modΠP.

5. Порядок перестроения пар решеток - вычетов от modΠP_1 до modΠP_2
. Таким образом приведенная система вычетов по modΠP, представленная комбинацией наложенных друг на друга целочисленных квадратных решеток $\leq$P (с векторами соответствующих простых нечетных чисел $\leq$P), пересеченная множеством "левых и правых"четных диагоналей (с единичным шагом - каждая), для каждого фиксированного значения нарастающего modΠP (П5=30., П7=210., П11=2310., ...ΠP), представляет собой периодическое повторение "фрактального ромба$-\boxplus\Pi P$".
Где всякая диагональ =R, каждого "фрактального ромба$-\boxplus\Pi P$", содержит ровно ($\Pi P/2$) узлов пересечения с различными квадратными решетками $\gtrless$P. А каждый "фрактальный ромб$-\boxplus\Pi P$" (со стороной $=\Pi P/2$) на своих (ΠP/2) различных диагоналях (с четными номерами =R), содержит ровно $[\varphi(\Pi P)]^2$ узлов пересечений между собой пар решеток-вычетов >P, то есть различных пар вычетов modΠP.
Для каждого фиксированного значения нарастающего modΠP_1 выделим два вида четных номеров диагоналей вида R и RP принадлежащих всякому "фрактальному ромбу$-\boxplus\Pi P_1$" где:
R - четный номер диагонали вида =R. Четное число =R (НЕ кратное числу $=P_2$).
RP - четный номер диагонали вида =RP. Четное число =RP (кратное числу $=P_2$).
Вполне очевидно что, на переходе от modΠP_1 к modΠP_2 всякий "фрактальный ромб $-\boxplus\Pi P$" повторяется P_2 раза по высоте, и P_2 раза по длине. То есть количество диагоналей "фрактальных ромбов$-\boxplus\Pi P$" -возрастает от ($\Pi P_1/2$) до ($\Pi P_2/2$). Количество узлов пересечений, с различными квадратными решетками $\gtrless$P на удлиняемых диагоналях также увеличивается от ($\Pi P_1/2$) до ($\Pi P_2/2$).
При этом:
А). В ходе P_2 повторений (по своей высоте, с периодом $=\Pi P_1$), мы получим : ($\Pi P_1/2$)(P_2-1) диагоналей вида R плюс ($\Pi P_1/2$)$\bullet$1 диагоналей вида RP, на которых будут расположены узлы пересечения пар решеток-вычетов modΠP_1 в количестве:

$--$вид R). $[\varphi(\Pi P_1)]^2 \bullet (P_2{-}1)$узлов пар решеток-вычетов modΠP_1, (то есть узлов пересечения пар решеток-вычетов $> P_1$ расположенных на всех "повторенных"диагоналях вида R.
$--$вид RP). $[\varphi(\Pi P_1)]^2 \bullet 1$ узлов пар решеток-вычетов modΠP_1,(то есть узлов пересечения пар решеток-вычетов $> P_1$ расположенных на всех "повторенных"диагоналях вида RP.
B). При этом, так как на переходе от modΠP_1 до modΠP_2 на комбинацию квадратных решеток $\leq P_1$ мы накладываем очередную безграничную квадратную решетку с вектором $=P_2$. Значит в ходе P_2 удлинения всякой диагонали вида =R,RP от каждых P_2 подряд стоящих узла будет отсекаться один узел на всякой диагонали вида =RP и два узла на всякой диагонали вида =R. (Как кратные числу $=P_2$ НЕ вычету для modΠP_2. Смотрите рис.8.).
Таким образом в результате P_2 удлинения всех этих $(\Pi P_2/2)$ диагоналей вида =R,RP мы получим узлы пересечения пар решеток-вычетов для modΠP_2 в количестве:
$--$вид R). $[\varphi(\Pi P_1)]^2 \bullet (P_2 - 1) \bullet (P_2{-}2)$ узлов пар решеток-вычетов modΠP_2. (то есть узлов пересечения пар решеток-вычетов $> P_2$ расположенных на всех "удлиненных"диагоналях вида R.
$--$вид RP). $[\varphi(\Pi P_1)]^2 \bullet 1 \bullet (P_2{-}1)$ узлов пар решеток-вычетов modΠP_2. (то есть узлов пересечения пар решеток-вычетов $> P_2$ расположенных на всех "удлиненных"диагоналях вида RP.
Всего получим: $[\varphi(\Pi P_1)]^2 \bullet (P_2 - 1) \bullet (P_2{-}2) + [\varphi(\Pi P_1)]^2 \bullet 1 \bullet (P_2{-}1) = [\varphi(\Pi P_1)]^2 \bullet (P_2 - 1) \bullet (P_2{-}2{+}1) = [\varphi(\Pi P_2)]^2$ узлов пересечений пар решеток-вычетов $> P_2$ по modΠP_2 расположенных на всех $(\Pi P_2/2)$ диагоналях всякого "фрактального ромба$-\boxplus\,\Pi P_2$".

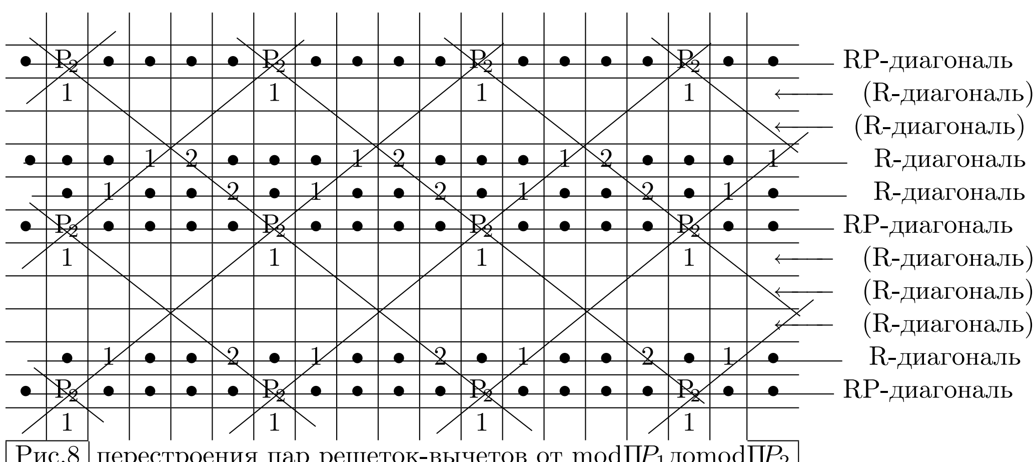


Рис.8 перестроения пар решеток-вычетов от modΠP_1domodΠP_2

Допустим:
что всякая диагональ (вида =R,RP "фрактального ромба$-\boxplus\,\Pi P_1$") содержала f(R,RP) узлов пар решеток-вычетов $> P_1$ по modΠP_1.
Где: f(R,RP)$=\Pi(P_{R,RP}-1)\Pi(P_m-2)$ пар modΠP_1 (узлов). $P_{R,RP}., P_m \leq P_1$. Тогда:
A). При P_2 повторениях "фрактального ромба$-\boxplus\,\Pi P_1$" (по высоте), количество пар на каждой из $(\Pi P_2/2)$ "повторенных"диагоналях вида R,RP остается неизменным =f(R,RP) пар. Так как для фиксированного modΠP_1 остаются без изменения: $P_{R,RP}, P_m \leq P_1$.

B). Далее в ходе P_2 удлинения диагоналей вида =R,RP от каждых P_2 подряд стоящих узла будет отсекаться один узел на всякой диагонали вида =RP и два узла на всякой диагонали вида =R. (Как кратные числу $=P_2$ НЕ вычету для modΠP_2. смотрите рис.8.)

Тогда получим:

$--$ для диагонали вида R). получим: f(R)$\bullet(P_2-2)=\Pi(P_R-1)\Pi(P_m-2)$ узлов пар решеток-вычетов$> P_2$ для modΠP_2. Где: $P_R, P_m \leq P_2$.

$--$ для диагонали вида RP). получим: f(RP)$\bullet(P_2-1)=\Pi(P_{RP}-1)\Pi(P_m-1)$ узлов пар решеток-вычетов $> P_2$ для modΠP_2. Где: $P_{RP}, P_m \leq P_2$.

$--$ Для всякой диагонали "левых фрактальных ромбов$-\boxplus\Pi P_2$" в виде разности двух решеток-вычетов по modΠP_2. Вида: R=$(C-C_1)$ где $1\leq C_1 < \Pi P_2$.

$--$ Для всякой диагонали "правых фрактальных ромбов$-\boxplus\Pi P_2$""в виде суммы двух решеток-вычетов по modΠP_2. Вида: R=(C+C) где C$> 2\Pi P_2$.

где: $P_{R,RP}., P_m \leq P_2$.

$P_{R,RP}-$ простые числа канонического разложения четного числа =R.,RP

P_m- все остальные простые числа канонического разложения четного числа=ΠP_2.

RP $-$ четный номер диагонали =RP, кратный числу $=P_2$.

R $-$ четный номер диагонали =R взаимно простой с числом $=P_2$.

C $-$ квадратные решетки-вычеты $> P_2$ по modΠP_2

6. Четные числа в виде суммы и разности двух вычетов по modΠP. Таким образом мы получили, что каждый отрезок "левой и правой"диагонали длиной $=\Pi P/2$ принадлежащие всякому "левому, или правому фрактальным ромбам"содержат f(R) узлов пересечений пар решеток-вычетов >P. Значит:

Всякое четное число =R можно f(R)= $\Pi(P_R-1)\Pi(P_m-2)$ различными способами представить в виде разности двух вычетов по modΠP.

Всякое четное число=R$\geq 2\Pi P$ можно f(R)= $\Pi(P_R-1)\Pi(P_m-2)$ различными способами представить в виде суммы двух вычетов по modΠP.

где: P_R- простые числа канонического разложения этого четного числа=R. P_m- все остальные простые числа канонического разложения числа=ΠP. (P_R и $P_m \leq$P).

Действительно: допустим, что существует некое четное число =(n$\bullet\Pi P$+Q), отрезок "правой"четной диагонали (длиной = $\Pi P/2$) имеющий четный номер вида (n$\bullet\Pi P$+Q), который невозможно f(Q)= $\Pi(P_Q-1)\Pi(P_m-2)$ способами представить в виде суммы двух вычетов по modΠP. (P_Q- простые числа канонического разложения этого четного числа =(n$\bullet\Pi P$+Q)., n>2., (P_Q и $P_m \leq$P).

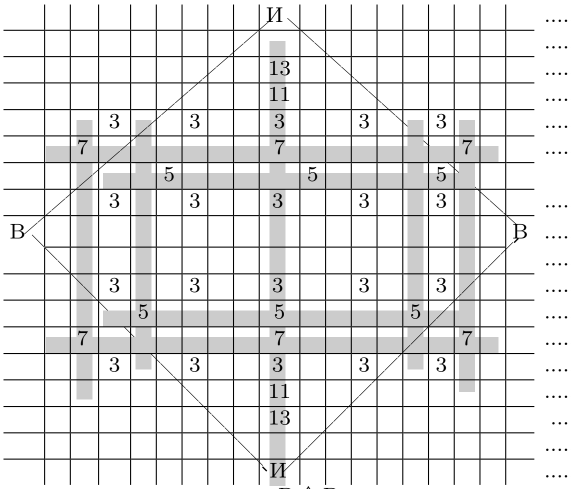
Тогда слева от "диагонали B", существует тождественная четная диагональ вида (n$\bullet\Pi P$+Q), а значит существует и тождественная соответствующая диагональ четного номера вида -"Q"(длиной =$\Pi P/2$ расположенная в "первом левом ромбе"от 1 до $2\Pi P+1$). При этом данная четная диагональ "Q"то есть четное число ="Q"так же не разложимо f(Q)= $\Pi(P_Q-1)\Pi(P_m-2)$ способами в виде разности двух вычетов по modΠP, что противоречит доказанному.

Автор будет признателен модератору, кто поддержит эти материалы для публикации в Arxiv.org. ag ask@mail.ru

Список литературы

[1] V. Serpinsky. We know what and does not know about the basic numbers, Moscow, 1963.
[2] G. N. Bergman. Number and the science about it, Moscow, 1949.
[3] P. S. Alexandrov. Encyclopedia of elementary matematics,Book 1,"The Arithmetic".Moscow,1951
[4] A. G. Shcherbakov.On even numbers in the kind of differences of two residues by modulus=ΠP
[5] A. G. Shcherbakov, Addenda: Table 2, 3, 6, 7.

элементы фрактального узора ⊞ПP в виде комбинации квадратных решеток ≤Р



сечение В ⇕ В.
(тождественно И⇔И с поворотом на 90°)

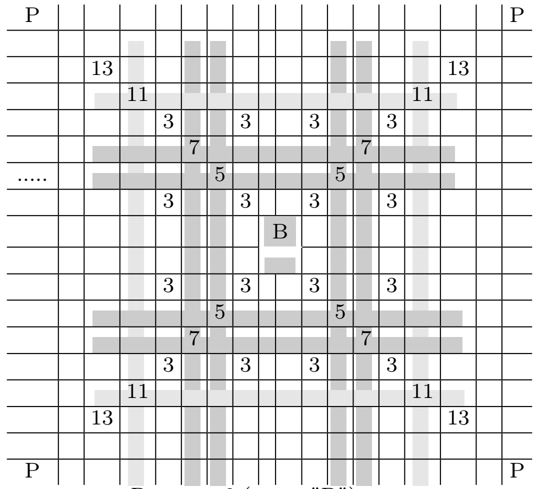


Рисунок 2.(вид - "В")
(вложенные друг в друга ⊞ решетки≤Р)

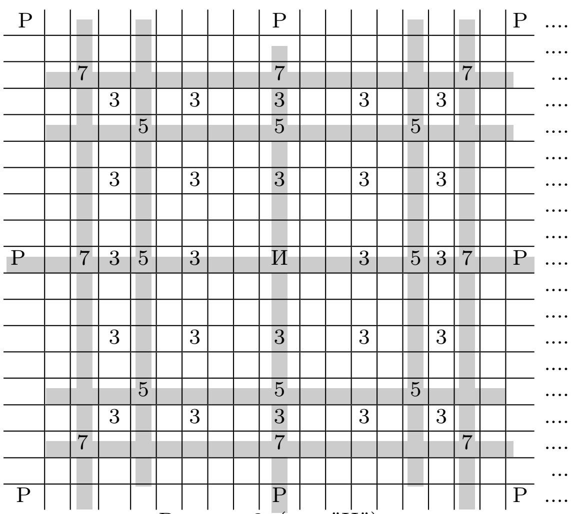
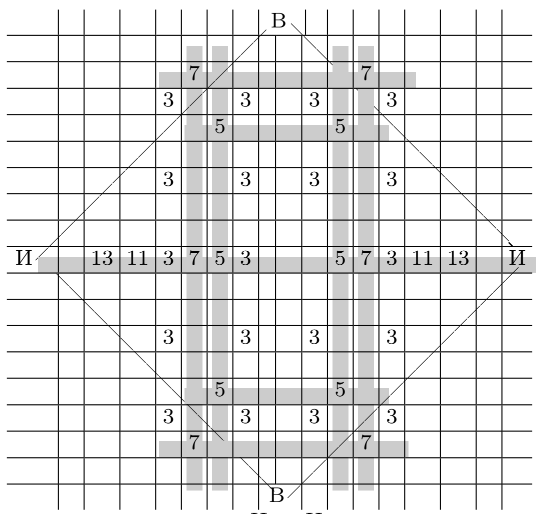
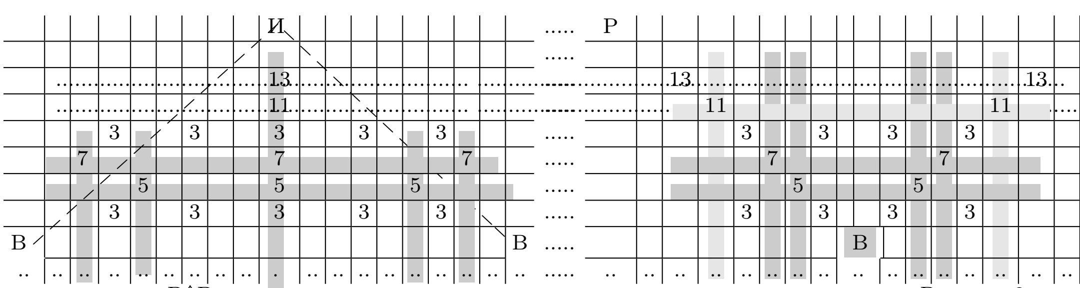


Рисунок 3. (вид "И")
⊞ решетки ≤Р исходящие из центра -(И)



сечение И ⇔ И
(тождественно В⇕В с поворотом на 90°)



сечение В⇕В

Рисунок 2.

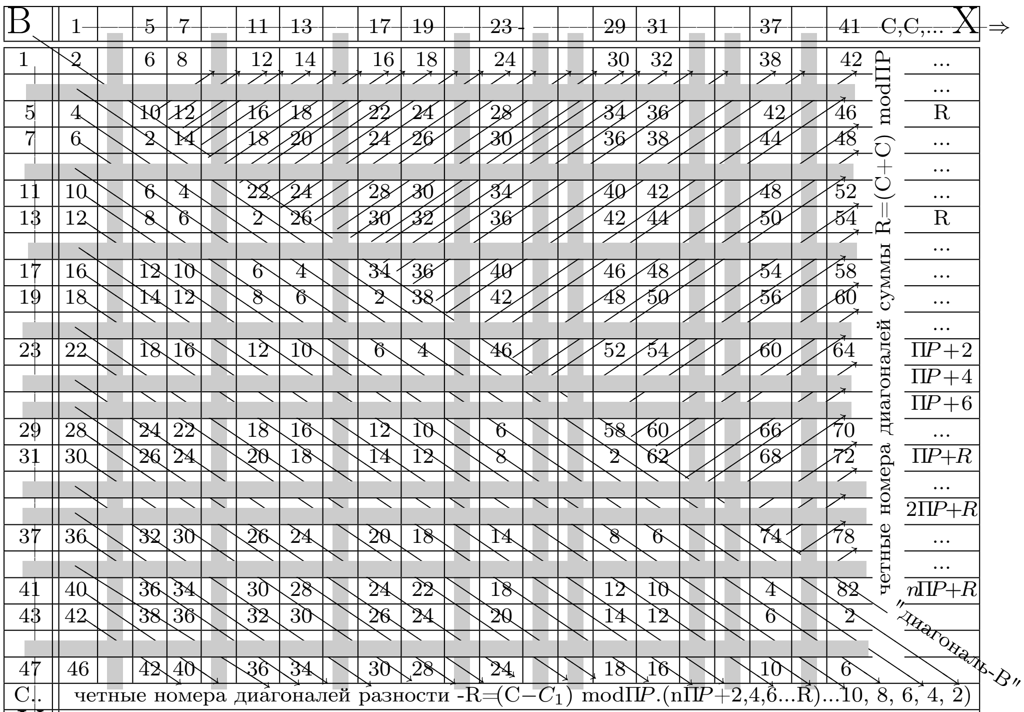


Рисунок 6. Вид четных чисел =R на диагоналях фрактального ромба

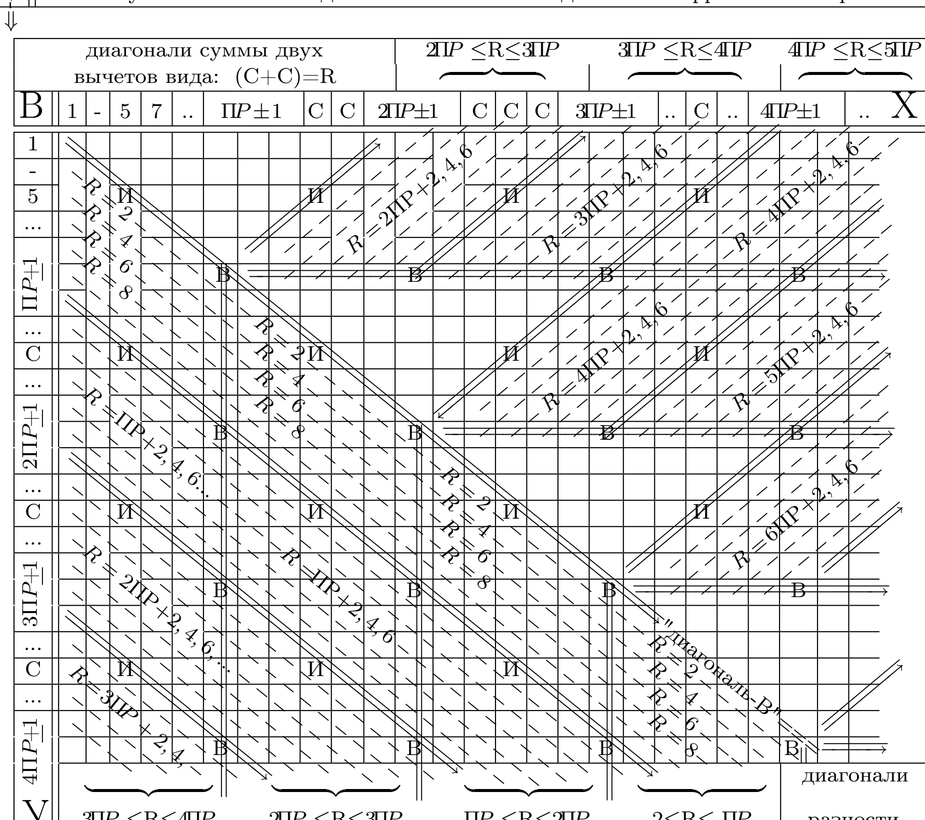


Рисунок 7. Фрактальный узор ромбов четных диагоналей